

Очный этап по математике

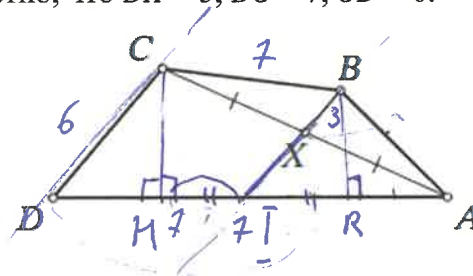
9 класс

Задание 1

Найдите наибольшее пятизначное число, произведение цифр которого равно 120.

Задание 2

Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, X — середина диагонали AC . Оказалось, что $CD \parallel BX$. Найдите AD , если известно, что $BX = 3$, $BC = 7$, $CD = 6$.

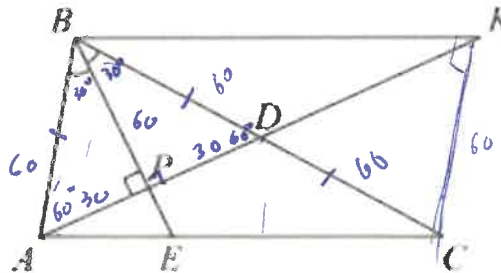


Задание 3

В магазине есть пуговицы шести цветов. Какое наименьшее количество пуговиц надо купить, чтобы их можно было пришить в ряд, так чтобы для любых двух различных цветов в ряду нашлись две соседние пуговицы этих цветов?

Задание 4

В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 60. Найдите стороны треугольника ABC .



Задание 5

Пусть k — натуральное число. Известно, что среди 29 последовательных чисел $30k+1$, $30k+2$, ..., $30k+29$ имеется ровно 7 простых. Докажите, что первое и последнее из них — простые.

Задание 6

Володя расставил несколько (возможно 0) шахматных фигур на доску 8×8 . Лёня заметил, что в каждом квадрате 2×2 стоит одинаковое количество фигур. А Влад заметил, что в каждом прямоугольнике 3×1 (или 1×3) стоит одинаковое количество фигур. Сколько фигур было выставлено на доску? (Укажите все варианты и докажите, что других нет.)

№1

62521 $6 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

0

№2

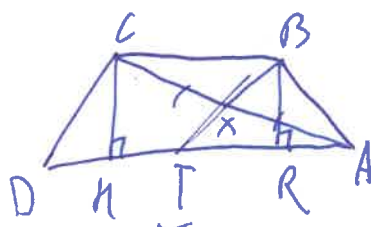
Т.к $BC \parallel CD$, то $CB = DI \Rightarrow DI = 7, IR = 7$

$DR = DI + IR$

$IR = 3,5$, тогда $BR = 7 + 3,5 = 10,5$

$\triangle BIA$ - р/д

$AD = 14$



№3

18 нульц.

Всего 6 углов, а для того, чтобы для двух различных углов нашлись две соседние нульцы этих углов, то нужно, чтобы каждого угла было по 3. $6 \cdot 3 = 18$

№4

$BE = AD = 60$

$\triangle BPD$ и $\triangle BAD$

$\angle BPA = \angle BPD$ (BP - высота)

$\angle ABD = \angle DBP$ (BD - биссектриса)

BP - общая

$\triangle BPD \sim \triangle BAD \Rightarrow BA = BD = AD = 60$

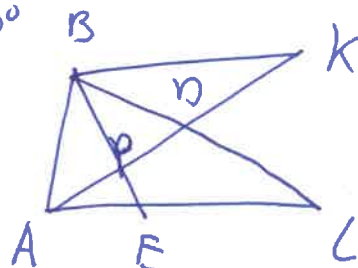
$\triangle ABE$ - р/д

$AB^2 = 30^2 + 60^2$

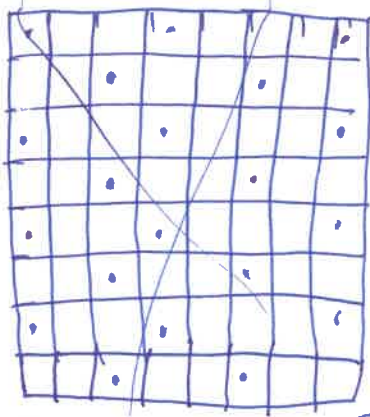
$AC \geq 70$

$AC \geq 70$

$BC = 120^\circ$



№6



$8 \cdot 8 = 64$ - S-доски
 $2 \cdot 2 = 4$ - S на которой Лена заметила
 одинаковое кол-во фигур
 $1 \cdot 3 = 3$ - S, на которой у нее Влад за-
 метил одинаковое ко-ло фигур
 $64 : 4 = 16$ - всего на участке 2×2
 фигур.

Возможно, что было выставлено 0 фигур, ведь в таком случае в квадрате 2×2 и прямоугольнике 3×1 будет одинаков количество.

Возможно, что было выставлено 64 фигуры по всей доске. В таком случае в квадратах 4 и прямоугольниках количество фигур будет равным.

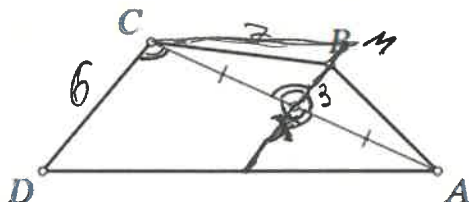
Другие варианты невозможны, так как ведь как не выставить фигурки, где то их будет в квадрате не хватать, а где то и наоборот.

Очный этап по математике9 класс**Задание 1**

Найдите наибольшее пятизначное число, произведение цифр которого равно 120.

Задание 2

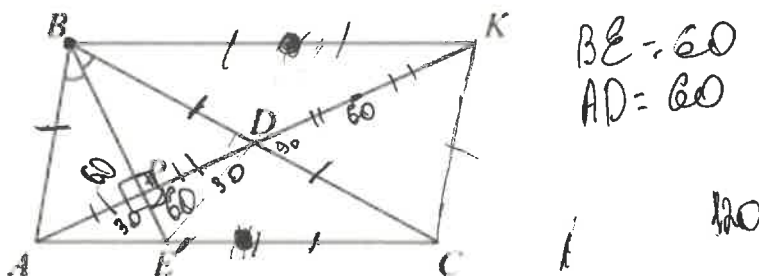
Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, X — середина диагонали AC . Оказалось, что $CD \parallel BX$. Найдите AD , если известно, что $BX = 3$, $BC = 7$, $CD = 6$.

**Задание 3**

В магазине есть пуговицы шести цветов. Какое наименьшее количество пуговиц надо купить, чтобы их можно было пришить в ряд, так чтобы для любых двух различных цветов в ряду нашлись две соседние пуговицы этих цветов?

Задание 4

В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 60. Найдите стороны треугольника ABC .

**Задание 5**

Пусть k — натуральное число. Известно, что среди 29 последовательных чисел $30k+1$, $30k+2$, ..., $30k+29$ имеется ровно 7 простых. Докажите, что первое и последнее из них — простые.

Задание 6

Володя расставил несколько (возможно 0) шахматных фигур на доску 8×8 . Лёня заметил, что в каждом квадрате 2×2 стоит одинаковое количество фигур. А Влад заметил, что в каждом прямоугольнике 3×1 (или 1×3) стоит одинаковое количество фигур. Сколько фигур было выставлено на доску? (Укажите все варианты и докажите, что других нет.)

№1 Разложим число 120 на множители: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ и заметим, что наибольшими делителями этого числа будут 8, 5, 3 (наибольшие числа, которые так же являются цифрами данного числа). Расставив их в порядке убывания, т.к. нам нужно найти наибольшее число, получим начало пятизначного числа: 853 и нам не хватает двух цифр, поэтому запишем две единицы: 85311.

Ответ: 85311.

№5 Пусть $K=1$, тогда наша последовательность будет: 31-53, где простыми числами будут 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59. нам это подходит.

Предположим, что $K=n$ и при этом условие сохраняется, тогда оно будет верным и при $K=n+1$. Т.к. прибавляя каждый раз $n+1$ мы можем заметить, что число увеличивается на 30, то условие так же сохраняется, если первое ^{последнее} ~~число~~ простое.

№6

0 и 64.

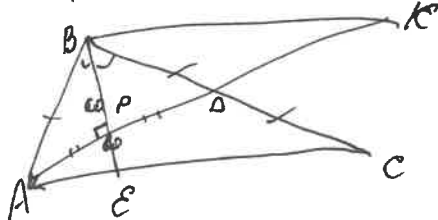
Т.к. квадраты 2×2 являются частью ^{прямоугольников} ~~квадратов~~ 3×1 , то и в каждом должно быть равное кол-во фигур, то это возможно только при отсутствии фигур на поле или, если во всех клетках будет стоять какая-то фигура.

№9

4 пуговицы двух цветов и они должны быть вышиты в ряд так: $\bullet \bullet \bullet \bullet$, последние замыкающие.

или 2 пуговицы одного цвета. Их можно вышить в ряд и тогда для каждой из этих пуговиц соседями будут: пуговица того же цвета и невидимая пуговица (невидимого цвета).

№11



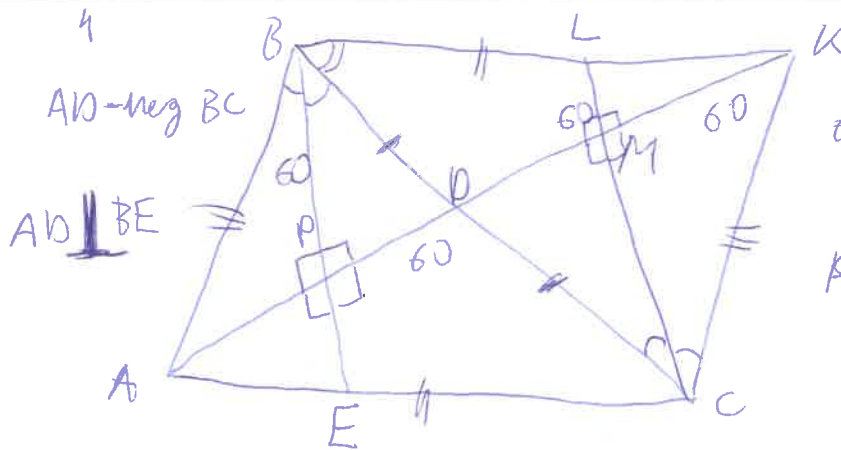
Дано: $\triangle ABC$, BE - бис-са с B ,
 AD - медиана, $BD=DC$, $AD \perp BC$,
 $BE=60$, $AD=60$,
 Найти: AB , AC , BC .

Решение:

1) Так $BP \perp AD$ и BP — высота $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$, то $\triangle ABD$ — равнобедренный, $AB = BD = DC$ (по признаку равнобедр. $\triangle$) $\Rightarrow AP = PD = \frac{1}{2} AD = 30$.

2)

мат. 9-11-05



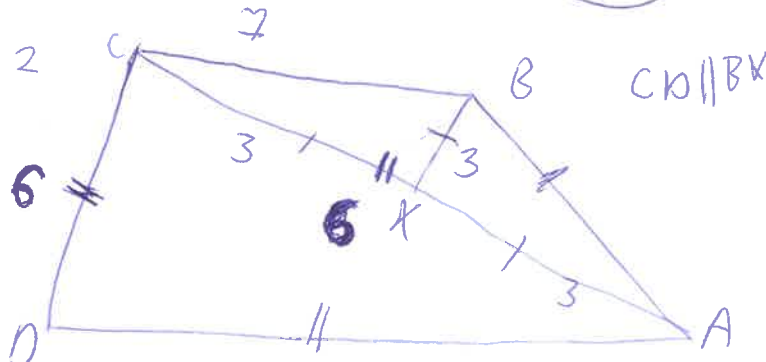
диагонали перпендикулярны в точке O, причем

$$AB=DK \quad BO=OC$$

~~PO - медиана~~

$BE \parallel LC$ - параллельно.

1 $8 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 = 120 \Rightarrow 85311$ 54322



$$BX^2 = CX \cdot AX \quad CX = AX = 3 \Rightarrow AC = 6$$

$$9 = X^2 \quad X = 3 \Rightarrow \triangle ACD - \text{равноб.}$$

$$\triangle ACD \sim \triangle ABX$$

$$\frac{CD}{BX} = \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AX}$$

$$\frac{6}{3} = \frac{AD}{3} \Rightarrow \triangle ACD = 18$$

$$AD = 6$$

5 $k \in \mathbb{N} \quad 30k+1 \quad 30k+2 \dots$

30k+2 9 $\{ 30k+2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots$

14 чисел 28 делится на 2

2 делится на 5 но не на 2

9 чисел $\{ 30k+3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27 \}$ - делится на 3

5 чисел $\{ 30k+5, 10, 15, 20, 25 \}$ - делится на 5

$14+9+5 = 28$ чисел

простые числа $29-19=10$ чисел
но должно быть 7 простых

$$30k+1 \quad 30k+7 \quad 30k+11 \quad 30k+13 \quad 30k+17 \quad 30k+19$$

$$30k+23 \quad 30k+29 \text{ — 8 чисел, значит 7 простых чисел}$$

$30k+1$ и $30k+29$ если хотя бы 1 из чисел составное
то простых останется не более 6

если оба составные, то останется тоже не более 6

$\Rightarrow$ хотя бы 1 из чисел $30k+1, 30k+29$ должно быть
простым, но т.к. простых должно быть хотя бы 7, а они
 $\Rightarrow$ то оба числа будут простыми

ч.т.д. $30k+1 \quad 30k+29$ простые

3 $C_6^2 = 15$ цветов 6

15 комбинаций

если городов N , то кол-во соединений $N-1$

число городов $N-1 \geq 15 \quad N \geq 16$ Ответ: наименьшее

~1

Шестнадцать радиусов делят круг на шестнадцать частей.

А десять ~~из~~ окружностей на одинаковые части.

т.е. вместе они делят круг на:

$$16 \cdot 11 = 176 \text{ частей}$$

Ответ: 176 частей

~2

П.к. 2n-угольный квадрат, а 15n-угольный куб. Рассмотрим их ~~по~~ по отдельности.

Рассмотрим 15n.

Чтобы 15n было полным ~~и~~ кубом и должно содержать 15^2 , т.е. 225, т.е. для того, чтобы 15n было кубом минимальное значение n это 225.

Рассмотрим 2n. Чтобы 2n было квадратом и должно содержать 2, т.е. для того, чтобы 2n было квадратом минимальное значение n это 2.

~~Но так как 15n должно быть также~~

Число $225 \cdot 2 = 450$ подходит для 2n-квадрата, но не подходит для 15n-куба,

потому что длина будет как в кубе, т.е. при.

т.е. $n_{\min} = 225 \cdot 2^3 = 1800$

Если $n = 1800$, то $2n$ - квадрат: $2 \cdot 1800 = 3600 = 60^2$, и $15n$ - куб: $15 \cdot 1800 = 27000 = 30^3$

Ответ: 1800

№6

$$x^2 + xy + y^2 = x + 20$$

$$x^2 + xy + y^2 - x - 20 = 0$$

$$x^2 + x(y-1) + y^2 - 20 = 0$$

Решим квадратное уравнение относительно x .

$$D = (y-1)^2 - 4(y^2 - 20) = y^2 - 2y + 1 - 4y^2 + 80 = -3y^2 - 2y + 81$$

Чтобы y нас были решения D должен быть неотрицательным, т.е. $-3y^2 - 2y + 81 \geq 0$

Решим это неравенство:

$$-3y^2 - 2y + 81 \geq 0$$

Найдем корни:

$$-3y^2 - 2y + 81 = 0$$

$$D = (-2)^2 + 3 \cdot 4 \cdot 81 = 4 + 972 = 976$$

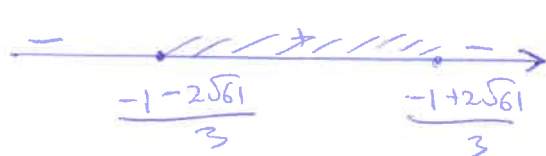
$$y = \frac{2 \pm \sqrt{976}}{-3 \cdot 2}$$

$$y_1 = \frac{2 + 4\sqrt{61}}{-6}$$

$$y_2 = \frac{2 - 4\sqrt{61}}{-6}$$

$$y_1 = \frac{-1 - 2\sqrt{61}}{3}$$

$$y_2 = \frac{-1 + 2\sqrt{61}}{3}$$



$$y \in \left[\frac{-1 - 2\sqrt{61}}{3}, \frac{-1 + 2\sqrt{61}}{3} \right]$$

Найдем целые y .

мат 9-11-01

$$y = -2; -1; 0; 1; 2$$

Подставим все y в исходное уравнение и найдем все решения!

$$x^2 + xy + y^2 = x + 20$$

1) $y = -2$

$$x^2 - 2x + 4 = x + 20$$

$$x^2 - 3x - 16 = 0$$

$$D = (-3)^2 + 4 \cdot 16 = 9 + 64 = 73$$

т.к. D не является квадратом, т.е. корни (т.е. x) будут не целые. Т.е. $y = -2$ не подходит

2) $y = -1$

$$x^2 - x + 1 = x + 20$$

$$x^2 - 2x - 19 = 0$$

$$D = (-2)^2 + 4 \cdot 19 = 4 + 76 = 80$$

т.к. D не является квадратом, то корни (т.е. x) не будут целыми $\Rightarrow y = -1$ не подходит

3) $y = 0$

$$x^2 + 0 + 0 = x + 20$$

$$x^2 - x - 20 = 0$$

по м. обр. м. Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \cdot x_2 = -20 \end{cases}$$

$$x_1 = 5; x_2 = -4$$

$$x_1 = 5; x_2 = -4$$

т.е. y нас получают решения: $(5; 0)$ и $(-4; 0)$

4) $y = 1$

$$x^2 + x + 1 = x + 20$$

$$x^2 = 19$$

$$x = \pm \sqrt{19} - x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow y = 1 \text{ не подходит}$$

5) $y = 2$

$$x^2 + 2x + 4 = x + 20$$

счит 9-11-01

$$x^2 + x - 16 = 0$$

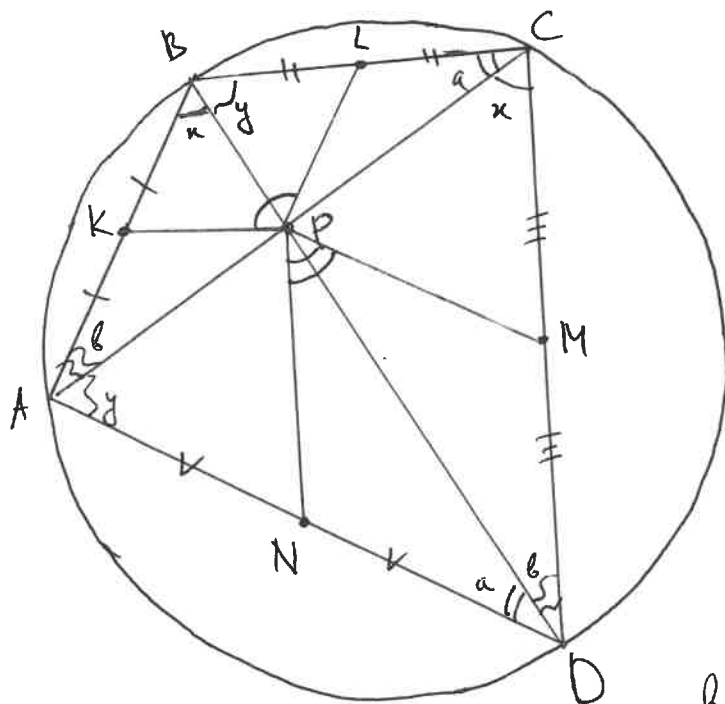
$$D = 1^2 + 4 \cdot 16 = 1 + 64 = 65$$

т.к. D не полный квадрат, т.е. корень (т.е. x) не будет целым, т.е. $y=2$ не подходит.

Мы рассмотрим все возможные варианты и у нас получится ответ: $(-5; 0), (4; 0)$

Ответ: $(-5; 0), (4; 0)$

~4



- 1) $\angle ABD = \angle ACP = x$, т.к. это внешние углы, которые опираются на одну дугу
- 2) $\angle CBP = \angle CAD = y$, т.к. это внешние углы, которые опираются на одну дугу.
- 3) $\angle BCA = \angle BDA = a$, т.к. это внешние углы, опирающиеся на одну дугу
- 4) $\angle BDC = \angle BAC = b$, т.к. это внешние углы, опирающиеся на одну дугу.

5) $\triangle BPC: \angle BPC = 180^\circ - (y + a)$

6) $\triangle CPD: \angle CPD = 180^\circ - (x + b)$

7) $\triangle APD: \angle APD = 180^\circ - (a + y)$

8) $\triangle APB: \angle APB = 180^\circ - (x + b)$

9) Тогда: $\angle CPD = \angle APB = 180^\circ - x - b$; $\angle BPC = \angle APD = 180^\circ - a - y$

10) Т.е. $\angle CPD = \angle APB = a + y$; $\angle BPC = \angle APD = x + b$

~3

4 и 5

т.е. размер таблицы 204×205 , то клеток в таблице четное количество.

Докажем, что пузечки не смогут оказаться в одной клетке, потому что у нас четное кол-во клеток.

Чтобы они были в одной клетке им нужно поровняться в высоте. Т.к. клеток 204 они смогут это сделать за одинаковое кол-во шагов.

~~Чтобы поровняться по длине~~

Им нужно также поровняться по длине. Но клеток у нас 205 , т.е. четное кол-во, т.е. пузечки не смогут сделать это за одинаковое кол-во шагов, т.е. они не смогут оказаться в одной клетке.

Ответ: не смогут

2